Matematyka w kolorze klocków Lego

Autor artykułu: Dr hab. Michał Szurek

Matematyka ma w społeczeństwie złą reputację. Zimna, bezduszna, nieprzydatna. Aha, i nudna! No cóż, jest niemało nauczycieli, którzy posiedli sztukę przedstawiania matematyki właśnie tak. Jeżeli taki nauczyciel doda do tego nieco aktorską umiejętność: „popatrzcie, jakie to trudne, ale ja wspaniale sobie z tym radzę, a dla was to i tak za trudne” – efekt jest murowany. Dzieci znienawidzą przedmiot nazywany czasem Królową Nauk.

Czy można inaczej, czy można nauczać tak, żeby uczniowie polubili matematykę – jeśli nawet nie głębokim uczuciem, takim z afektem młodzieńczej miłości, to z zaciekawieniem: „ojej, to fajne”. Odpowiedź nie jest prosta. Musimy się bowiem wpasować w programy nauczania, egzaminy takie i owakie, matury i trolejbusy (przepraszam, sylabusy). Uczniowie mają znać materiał przewidziany programem nauczania. Koniec. Kropka. Zabawa zabawą, a program nauczania trzeba zrealizować.

Posłużę się dwiema przypowieściami. Władysław Komar, wybitny lekkoatleta, pierwszy nieamerykański mistrz olimpijski w pchnięciu kulą (Monachium, 1972) na pytanie, czemu zawdzięcza swą wspaniałą formę, odpowiedział krótko: „Koks!” Zdumiony dziennikarz rzucił: „i pan się do tego przyznaje?”. „A dlaczego nie? Pracowałem przy rozładunku na kolei. Codziennie przerzucałem kilka ton koksu i pchanie tą żelazną kuleczką było po prostu śmieszne przy tej pracy!”.

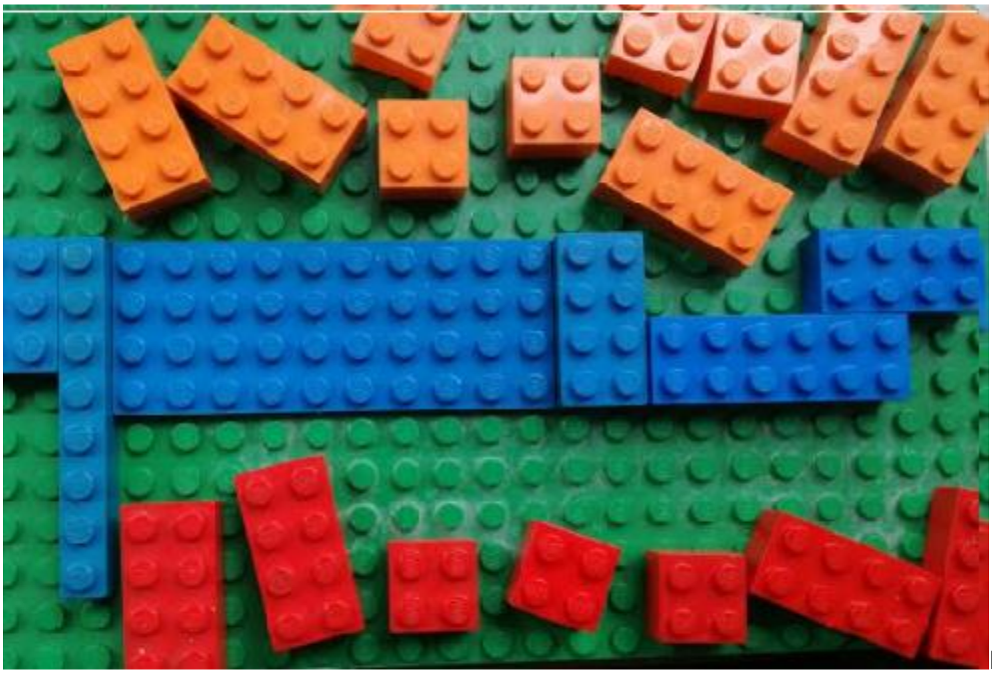
Drugą przypowieść – rzucę tylko hasłowo. Przypomnijmy sobie genialne posunięcie dydaktyczne Tomka Sawyera przy malowaniu płotu!

O ile morał z drugiej przypowieści jest jasny, to o co chodzi w pierwszej? Zajmujmy się interesującą matematyką, pełną barw, … a „słupki” same o siebie zadbają. Czy naprawdę? Tak, w tym sensie, że młody człowiek (dowolnej płci!) zafascynowany własnymi odkryciami (tak!) matematycznymi nauczy się szkolnej rutyny mimochodem i bez przymusu, może z lekkim uśmieszkiem „no, rozumiem, że i to muszę”.

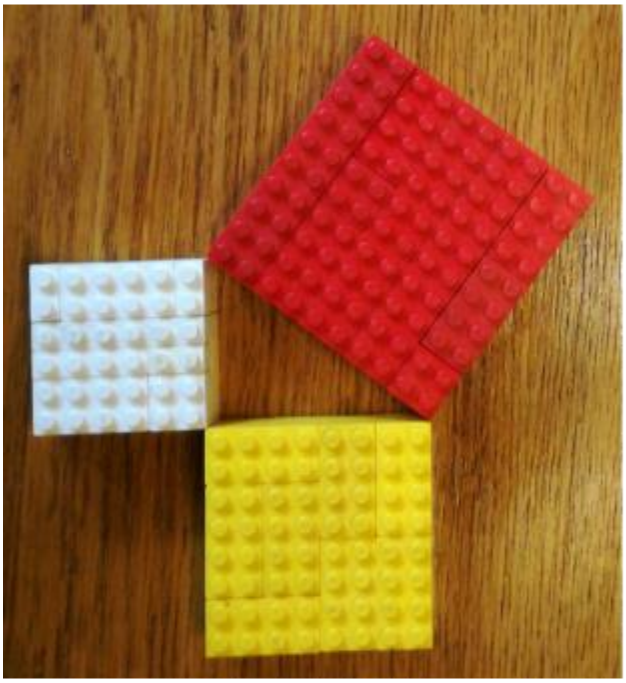
***

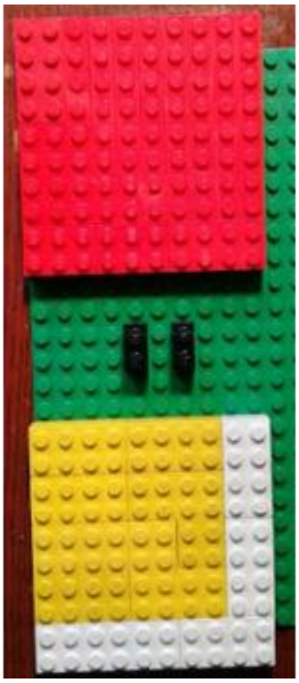
Pokażę tylko kilka pomysłów, jak zastosować klocki Lego do uatrakcyjnienia zajęć z matematyki – od pierwszej klasy szkoły podstawowej do … uniwersytetu. Wykorzystuję to, co w tych klockach jest najbardziej atrakcyjne: wielość kształtów i kolorów. Natomiast – jak będzie widać, używam tylko prostych klocków prostokątnych (puryści zarzucą mi, że powinienem pisać *prostopadłościennych*).

Zadanie 1. Przemienność i nieprzemienność dodawania. Wszyscy nauczyciele wiedzą, o co chodzi. Jako *operacje* dodawanie nie jest przemienne, co właśnie ilustruje fot. 1., gdzie mamy dwa sojusznicze oddziały żołnierzy (pomarańczowi na północy, czerwoni na południu, między nimi rozlewiska rzeki). Jeśli pułkownik wyda rozkaz, by do czerwonych dodać pomarańczowych, to kto będzie się przeprawiał przez rzekę i pod czyim dowództwem będzie cały oddział? Oczywiście przeprawią się pomarańczowi, a dowódcą zostanie czerwony – właśnie dlatego, że do jego oddziału dodano nowych żołnierzy. Choć liczbowo wynik jest ten sam, inny jest dowódca i inne jest położenie oddziału. Czy nie można było wziąć zamiast klocków Lego innych drobnych przedmiotów? Tak, można było, ale wtedy nie było tak barwnie.

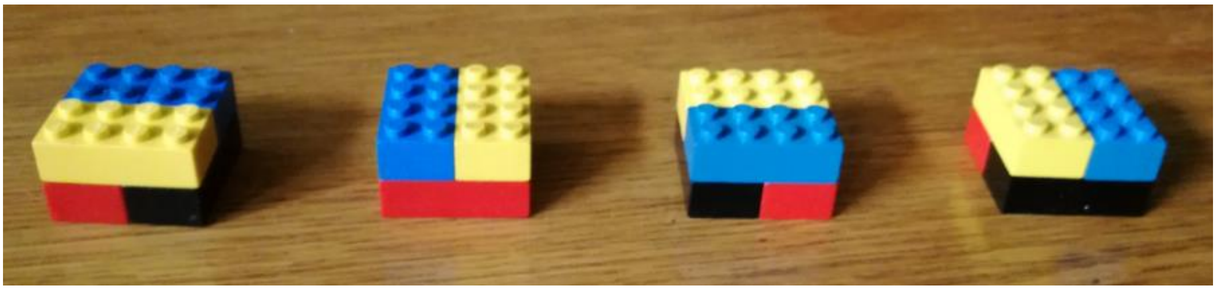

Fot.1.

Zadanie 2. A oto twierdzenie Pitagorasa. Ułóżmy inną zależność, np. $12^2+5^2=13^2$.




Fot. 2.

Zadanie 3. Weź cztery klocki Lego o wymiarach 2 x 1. Stosuję tu terminologię wymyśloną jeszcze przez moje dzieci, jednostką jest *czteroguziczkowy* klocek kwadratowy. Bierzemy zatem dwa klocki prostokątne o ośmiu *guziczkach.* Nazywanie tego *pinem* (co forsuje firma) jakoś … mi się nie podoba. Układamy sześcian z tych klocków bryłę jak na fotografii 3 – nie jest to jeszcze sześcian, a tylko prostopadłościan. Na ile sposobów można to zrobić? Na fotografii 3 mamy pokazany *jeden* sposób, a nie cztery (dlaczego?)



Fot. 3.

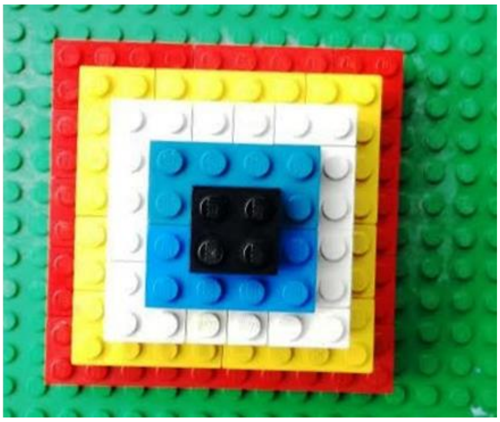
Czy wszyscy widzą, że w ten sposób wkroczyliśmy w obszar matematyki? Matematyka to *język liczb, kształtu i miary* – właśnie taki był tytuł książki profesora Stanisława Fudalego (1929 – 2015, książki napisanej w 1958 r.). Nie będziemy tu omawiać rozwiązania zadania – chodzi o sam problem. Nagle, niezauważalnie, znaleźliśmy się (wraz z uczniami) w obszarze porządnej, współczesnej matematyki. Jest tu i teoria niezmienników i teoria grup i nawet algebra *macierzy ortogonalnych.* Ale tego nasi uczniowie nie musza wiedzieć. Dowiedzą się, kiedy będą starsi. Niektóre aspekty dorosłego życia nie są właściwe dla dzieci.

Zadanie 4. Zbuduj sześcian 3 x 3 z klocków Lego. Taki, żeby się nie rozpadał. Już sięgasz po klocki? Stop. O jakie klocki prosisz? Przedstaw swoje plany konstrukcyjne. Jaki jest Twój business plan? Pamiętaj, że nic nie ma za darmo. Klocek 1×1 („czteroguziczkowy") kosztuje dwa centy, ośmioguziczkowy trzy centy a „dwunastoguziczkowy" (czyli 3 x 1) siedem centów. A co będzie dla sześcianów większych rozmiarów?

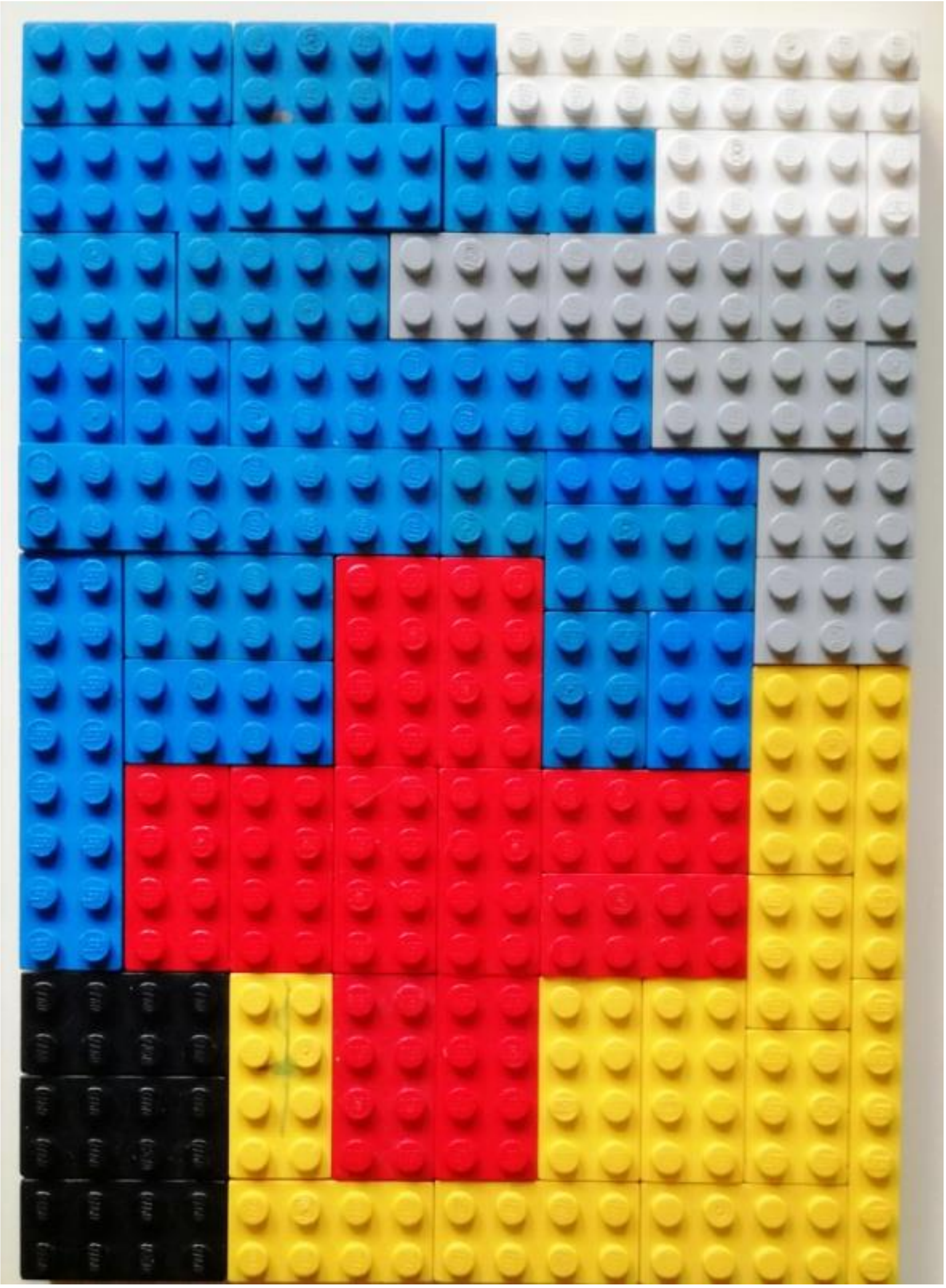
Przechodzimy do matematyki wyższej, od gimnazjum w górę.

Zadanie 5. Zbuduj wieżę, jak na fot. 4. Ile klocków potrzebujesz na kolejne piętra? Wyprowadź stosowny wzór. Uzasadnij.

Komentarz. I to, właśnie to, jest istotą matematyki. <u>Uzasadnij to, co zaobserwowałeś.</u> Nie chodzi nawet o przekonanie audytorium, że masz rację. Chodzi o dowód – formalne wyprowadzenie *tezy* z *założenia*, *wniosku* z *przesłanek.* To wymaga od nas *kultura matematyczna,* składnik naszej ogólnoludzkiej kultury.



Fot. 4.



Fot. 5.

Zadanie 6. Z jakim krajem kojarzy ci się obszar w kształcie kwadratowego czerwonego krzyża na fot. 5 ? Jest to kraj w Europie, ale nie należy do Unii Europejskiej. Ale nie o to chodzi w tym zadaniu. Policz, ile kolorów jest tu. Sześć, prawda? Ale klocki białe mógłbym zastąpić przez żółte, bo niekoniecznie różne kraje muszą być zamalowane różnymi kolorami. Co innego, gdyby sąsiadowały ze sobą, miały wspólną granicę. No, co wyobraź sobie, że białe zostały zastąpione przez żółte. Mamy pięć kolorów.

Czy może być ich mniej? Spróbuj coś „przemalować”. Na pewno uda ci się zejść do czterech. No, to może i trzy wystarczą?

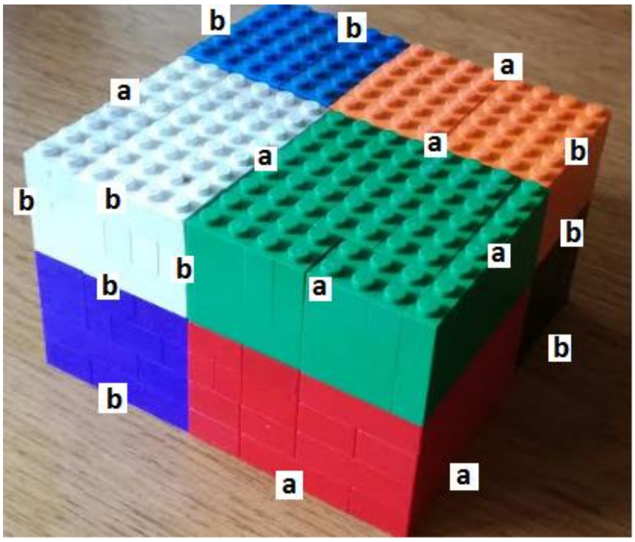
Nie! Na tej mapie nie można pokolorować krajów tylko trzema kolorami. Dlaczego? Ułóż inna układankę – taka, że cztery kolory wystarczą, a trzy nie. Odkryłeś twierdzenie o czterech barwach, o bardzo interesującej historii matematycznej.

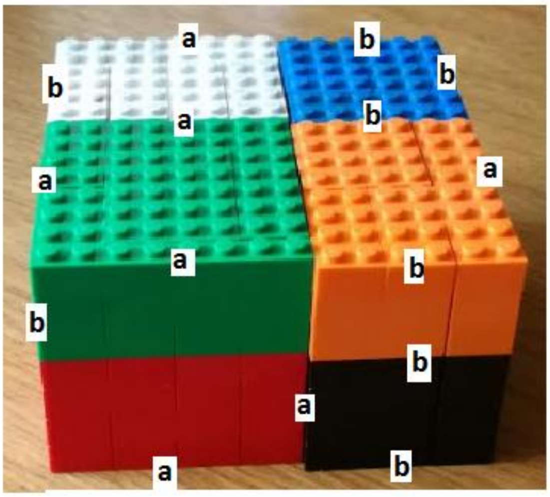
Zadanie 7. Ułóż z klocków Lego flagi Rosji, Słowacji i Słowenii i Francji.

Komentarz. Zadanie jest trudniejsze, niż się wydaje. Wszystkie te cztery kraje mają flagi w trzech kolorach: białym niebieskim i czerwonym. Flaga francuska ma pasy pionowe. pozostałe kraje pasy poziome. Na flagach Słowacji i Słowenii są herby, przedstawiające *kultowe* góry tych państw: Triglav i Krywań. Wykorzystaj sytuację, dowiedz się coś o słowiańskim, pogańskim jeszcze kulcie Trzygłowa. Poszukaj nazw „Krywań” w innych górach. Oczywiście herbów tych nie ułożysz z klocków na małej fladze. Zastąp je kwadracikiem. W którym miejscu flagi ma on być?

Ze względu na podobieństwo flag (szczególnie Słowacji i Słowenii), parlamenty tych krajów sprecyzowały po pierwsze, jakie mają być odcienie barw. Zajrzyj do Internetu, dowiedz się – są one istotnie trochę różne. Za pomocą klocków nie oddasz tych różnic. Natomiast – i na to zwróć uwagę – flagi te mają różne proporcje! To odkryj i wtedy dopiero buduj. A czy wiesz, jakie proporcje ma polska flaga? Jeśli nie, to dowiedz się, to przecież Twój sztandar. Zresztą, powiem: prostokąt ma mieć proporcje 5:8. Dlaczego takie? Musiałbym tu dłużej omawiać pojęcie *złotego podziału* z geometrii.

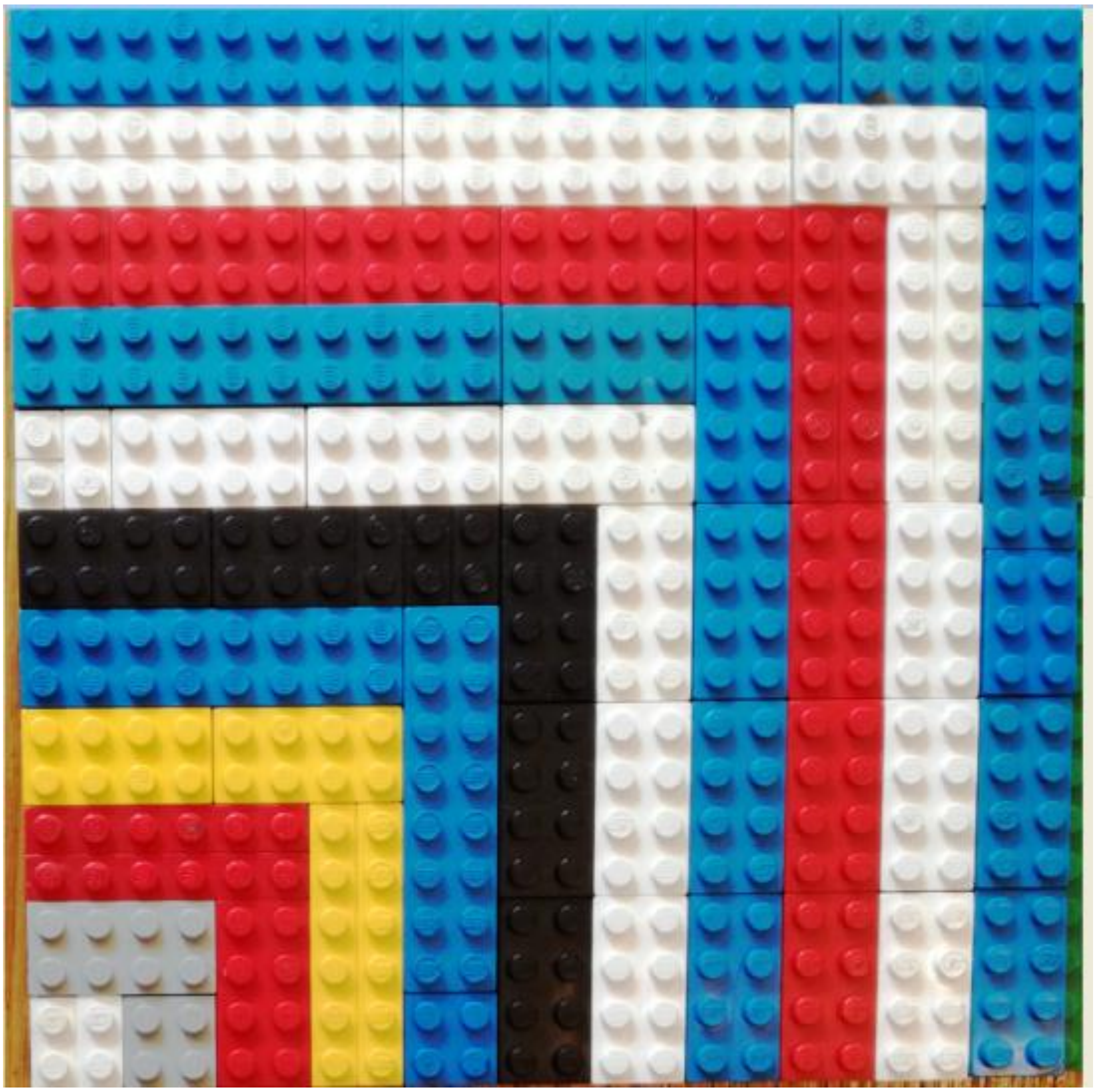
Zadanie 8. Jaki wzór matematyczny można zobaczyć na fotografii 6?





Fot. 6.

Zadanie 9. A teraz <u>zadanie-perełka</u>: od przedszkola do studiów matematycznych!!! Zadania końcowe mogą nie być zrozumiałe dla wszystkich …., ale o to mi też chodzi. Nie, nie, nie o to, żeby pisać niezrozumiale, tylko żeby pokazać, jak wiele można osiągnąć za pomocą naszych kolorowych klocków. Zadania 10 i 11 często wykorzystuję jako zadania egzaminacyjne dla studentów informatyki.

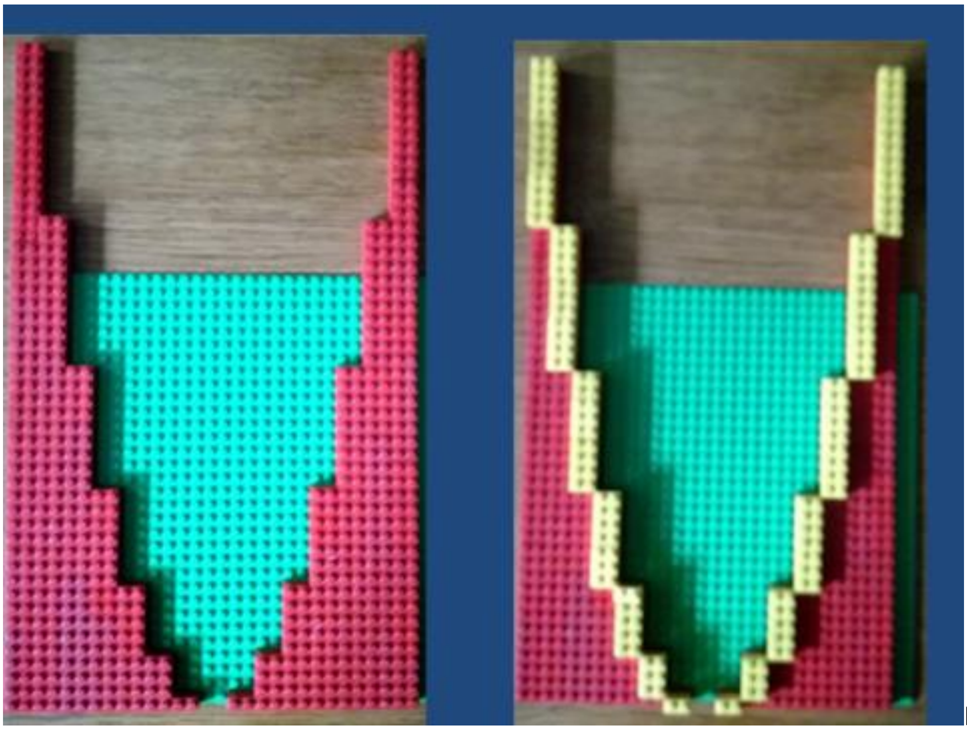

Fot. 7.

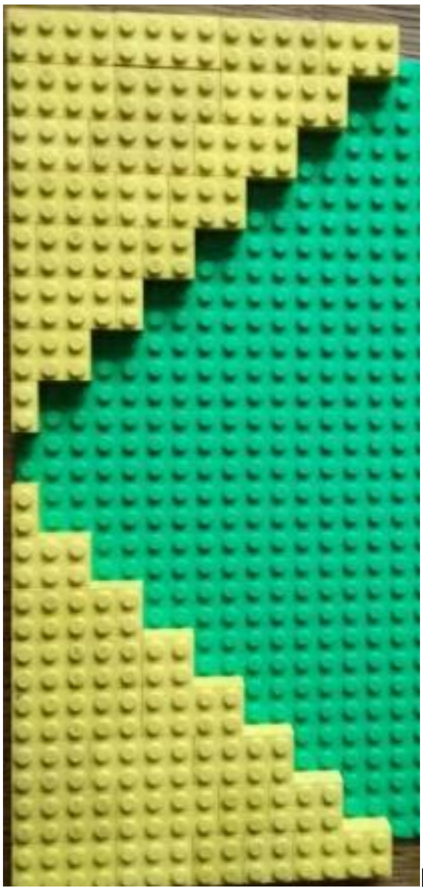
1. Jakie kolory widzisz na rysunku? Policz, ile. Nazwij kolory.
2. Ułóż podobną układankę, możesz zmieniać kolory dowolnie. Staraj się użyć jak najmniej klocków.
3. A teraz licz, ile kwadracików jest w poszczególnych kolorach: 1, 3, 5, 7,…. Jak nazywają się takie liczby? Ile kwadracików jest potrzebnych do ułożenia następnej warstwy?
4. A teraz licz, ile kwadracików ma cała układanka.
5. Wyobraź sobie, że chcesz komuś opowiedzieć przez telefon, jaką układankę zrobiłeś. Jak to opowiesz dziadkowi?
6. Czy umiesz wykorzystać ten obraz do obliczenia sumy 1+ 3 + 5 + 7 + 9 ?
7. Wykorzystując ten rysunek, odkryj wzór na sumę ciągu kolejnych liczb nieparzystych.
8. Czy widzisz, jak z tej układanki można otrzymać wzór na sumę kolejnych sześcianów liczb naturalnych?

9. W iloczynie kartezjańskim {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11}x{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11} wprowadzam relację równoważności (a,b) = (c,d), gdy max[a,b] = max [c,d]. Opisz klasy abstrakcji tej relacji. Wskazówka: spójrz na załączony rysunek.
10. W iloczynie kartezjańskim {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11}x{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11} wprowadzam relację częściowego porządku wzorem (a,b)<(c,d) gdy albo (a,b)=(c,d) albo max[a,b]<max[c,d]. Pokaż elementy maksymalne i minimalne, łańcuchy i antyłańcuchy. Omów twierdzenie Dillwortha. Omów własności topologii, generowanej przez takie przedziały początkowe. Wskazówka. Spójrz na załączony rysunek.
11. Wstaw liczby jak na rysunku poniżej. Napisz pracę na temat rozmieszczenia liczb na tym diagramie. Staraj się zmieścić na 30 stronach.

Fot. 8.

I wreszcie, matematyka wyższa, już naprawdę uniwersytecka. Na kolejnych fotografiach widzimy całkę funkcji kwadratowej i pochodną tej funkcji.


Fot. 9.


Fot. 10.

To tylko wstęp, szkic możliwości, jaką dają nam najprostsze klocki Lego w nauczaniu matematyki.
Dalsze możliwości – w następnych artykułach.